

LA CONVERSIONE E LA MOLTIPLICAZIONE

Articolo pubblicato su RADIORIVISTA N5 del 2005

Biagio Matassa IZ0CWZ

Vorrei far vedere come usando un pochino di matematica si possano comprendere molte cose della radio. Se un paio di lettori ne trarranno beneficio io ne sarò molto lieto altrimenti spero che qualcun altro sia stimolato a scrivere qualcosa di meglio.

E' sufficiente una sola idea per capire come si possa ottenere una conversione (ovvero una traslazione) di frequenza:

moltiplicando tra loro due segnali sinusoidali si ottiene la frequenza somma e la frequenza differenza.

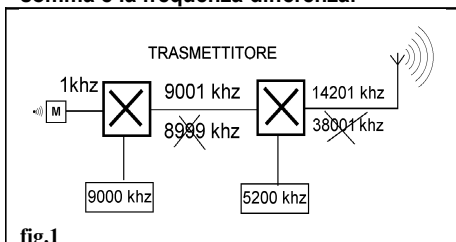


fig.1

Ad esempio se moltiplichiamo le due frequenze di 4MHz e di 3MHz otteniamo 7MHz e 1MHz.

Nei nostri apparati radio poiché ci sono alcune conversioni di effettuano moltiplicazioni tra opportune frequenze. Esaminiamo il caso della trasmissione: Se fischiamo davanti al microfono questo produce una frequenza di circa 1kHz, si effettua subito una

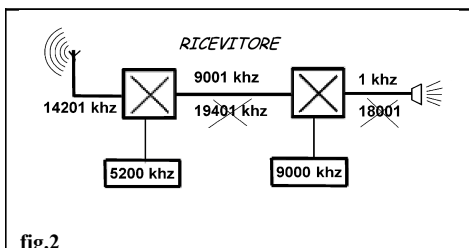


fig.2

moltiplicazione tra 1kHz e 9MHz (9000kHz) ottenendo le due frequenze di 9001 e 8999 kHz. Se ne sceglie una mediante un filtro, ad esempio 9001, e poi si effettua una seconda moltiplicazione con la frequenza di 5200 kHz ottenendo 14201kHz e 3801kHz. E' l'architettura classica con cui si possono ottenere, filtrando, la banda dei venti metri o quella degli ottanta.

Discorso simile si può ripetere per la ricezione: La frequenza in arrivo (14201) viene moltiplicata per la frequenza del VFO (5200) ottenendo la FI di 9001, (differenza), poi moltiplicando per la frequenza del BFO (9000) riotteniamo, prendendo ancora la differenza, il nostro bel fischio di 1kHz.

Tutto questo è conosciuto da tutti, però ci si chiederà: ma che c'entra la moltiplicazione! Perché moltiplicando si

ottengono la somma e la differenza?

Per capirlo è necessario riaprire qualche vecchio libro di trigonometria (La maggior parte dei radioamatori qualche volta l'ha studiata ma forse non ha sospettato che potesse essere utile per la radio). La matematica, bisogna ammetterlo, è il linguaggio più adatto che conosciamo per approfondire gli argomenti scientifici e tecnici, purché non se ne abusi. Il discorso matematico deve servire ad aumentare la chiarezza del discorso e non a diminuirlo. E poi ... sempre in piccole dosi.

Un segnale sinusoidale di frequenza f_1 si può scrivere:

Applicandola al nostro caso per $\alpha = \omega_1 t$ e $\beta = \omega_2 t$ si ha:

$$\cos(\omega_1 t) * \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2} \cos(\omega_1 t + \omega_2 t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_1 t - \omega_2 t)$$

Sono venute fuori due oscillazioni di frequenza $f_1 + f_2$ e $f_1 - f_2$ e di ampiezza $\frac{1}{2}$.

Se avessimo incluse le due ampiezze A_1 e A_2 sarebbe venuta l'ampiezza:

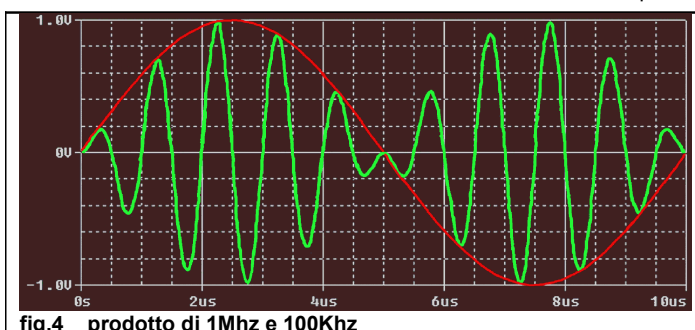


fig.4 prodotto di 1MHz e 100KHz

$A \cos(2\pi f_1 t)$ o più comodamente $A \cos(\omega_1 t)$ (A è l'ampiezza, ω la pulsazione che si ottiene dalla frequenza moltiplicandola per 6.28).

$$\frac{1}{2} A_1 A_2$$

Quindi se noi facciamo entrare due frequenze in un dispositivo capace di effettuare una moltiplicazione alla sua uscita non troviamo più le due frequenze ma la loro somma e la loro differenza. (fig 3)

Un secondo segnale si scriverà: $A \cos(2\pi f_2 t)$ ovvero $A \cos(\omega_2 t)$.

Credo sia chiaro a tutti questa scrittura che al variare del tempo ci dà i diversi valori oscillanti tra +A e -A. Chi avesse dubbi può ricorrere a un qualsiasi libro di Fisica.

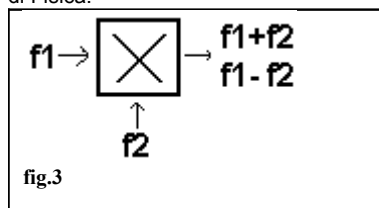


fig.3

Per moltiplicare tra loro $A \cos(\omega_1 t)$ e $A \cos(\omega_2 t)$ andiamo a cercare nel libro di trigonometria la formula di *Werner*:

$$\cos \alpha * \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

Di questa formula chiaramente chiunque può sul medesimo libro vedersene la dimostrazione o più semplicemente verificarla con una calcolatrice assegnando ad α e β dei valori arbitrari. Non bisogna accettare mai nulla per autorità.

Per vedere tutto ciò con gli occhi servirebbero due generatori, un oscilloscopio e un analizzatore di spettro. Non possedendoli si può usare un computer e un simulatore di circuiti come, ad esempio, Orcad Capture.

Nella fig.4 si considera il prodotto di due segnali di frequenza 1MHz e 100kHz (è riportato in rosso il segnale di 100kHz). Si osserva che il segnale rosso fa variare l'ampiezza del segnale verde. Quando esso vale 1 e quando vale -1 si ha l'ampiezza massima. Quando il segnale verde varrebbe 1, il prodotto ha il valore del segnale rosso assumendo valori negativi quando quest'ultimo è negativo. Notare l'inversione di polarità quando il segnale rosso passa per lo zero.

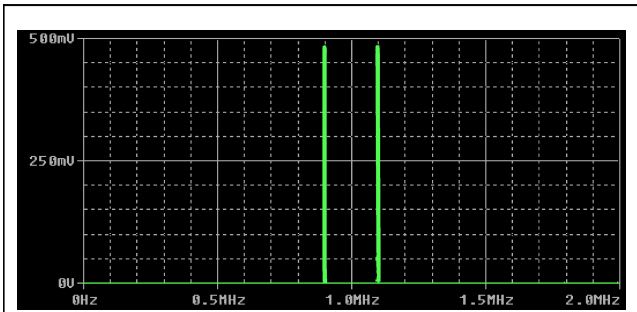


fig.5 Spettro di fig.4 (frequenze 0.9 e 1.1 Mhz)

Con lo stesso programma facciamo l'analisi spettrale (fig.4) usando la funzione FFT (Fast Fourier Trasformation). Sono evidenti le due frequenze somma e differenza (1.1 Mhz e 0.9 Mhz)

Nel calcolo effettuato in precedenza in ingresso c'era un solo segnale. Che cosa succede se al posto di f1 ci sono più segnali?

In questo caso adoperiamo anche l'operazione di addizione. Più segnali si possono scrivere:

$$A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t)$$

Sintetizziamo così : $F_1 + F_2 + F_3$

(Attenzione: con la Lettera grande indichiamo l'espressione di un segnale, con la lettera piccola la relativa frequenza)

Allora, indicando con $F_0 = A_0 \cos(\omega_0 t)$ il segnale moltiplicante, l'uscita sarà:

$$(F_1 + F_2 + F_3) * F_0 = F_1 * F_0 + F_2 * F_0 + F_3 * F_0$$

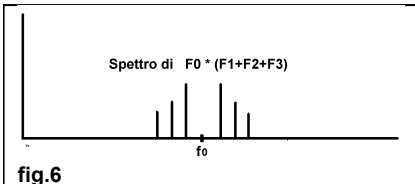


fig.6

sappiamo che i tre prodotti ci danno ciascuno la somma e la differenza e quindi le 6 frequenze (fig.6):

$$f_0 - f_1 \text{ e } f_0 + f_1, \quad f_0 - f_2 \text{ e } f_0 + f_2, \quad f_0 - f_3 \text{ e } f_0 + f_3,$$

3 frequenze a sinistra e 3 a destra di f_0 . Se le frequenze sono molte si hanno due bande laterali (fig.7)

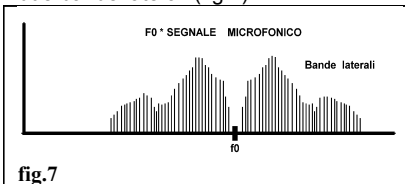


fig.7

Nella trasmissione SSB le frequenze foniche vengono moltiplicate per la frequenza portante ottenendo due bande laterali (come in fig.7) ma poi se ne utilizza una sola (tanto l'informazione utile è contenuta completamente in ognuna delle due) con grande vantaggio per la banda occupata

Un altro esempio: Consideriamo tutti i segnali della banda 144-146Mhz e moltiplichiamoli per il segnale di 116Mhz otteniamo le due bande (laterali) 28-30 e 260-262 Mhz. Possiamo quindi ricevere detti segnali

con un ricevitore 28-30Mhz, ma anche con uno che lavori intorno a 260 Mhz.

Qui possiamo anche dire che la banda 144-146 Mhz viene tralata a 28-30Mhz

Si noti che anche la banda 86-88Mhz darebbe lo stesso risultato.(problema dell'immagine).

Con qualche piccola aggiunta alla dimostrazione iniziale si potrebbe far vedere che se i segnali di partenza sono modulati in ampiezza ,frequenza o fase, i segnali traslati conservano perfettamente queste modulazioni.

Una volta convinti che il prodotto risolve perfettamente tutti i nostri problemi di conversione si tratterà di trasferire in realizzazioni tecniche (possibilmente economiche) questa acquisizione, cosa non semplice, ma la strada da percorrere è estremamente chiara.

Nei nostri apparecchi la moltiplicazione si cerca di ottenerla mediante dispositivi elettronici. È facile immaginare come un segnale elettrico possa far variare il guadagno di un amplificatore e quindi effettuare una specie di moltiplicazione, ma effettuare una precisa moltiplicazione è tutta un'altra cosa. E questo è il motivo per cui i nostri mixer hanno le limitazioni che conosciamo, soprattutto con i segnali forti. Se riuscissimo ad effettuare perfettamente la moltiplicazione, possiamo senz'altro affermare che non ci sarebbero né modulazioni incrociate né intermodulazioni di nessun genere (almeno per quanto riguarda il mixer).

Un dispositivo che effettua una

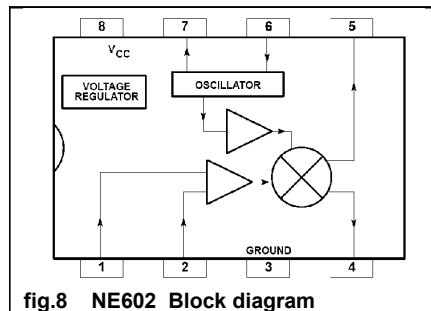


fig.8 NE602 Block diagram

accettabile moltiplicazione ed è abbastanza economico è l'integrato NE602, (fig.8,9) con cui possiamo

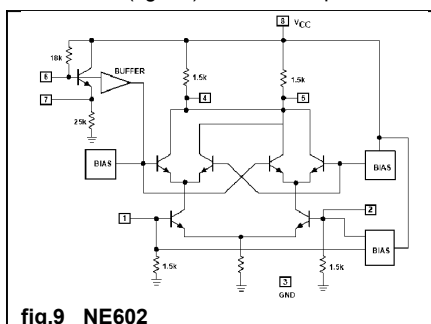


fig.9 NE602

realizzare dei buoni ricevitori, ma per segnali molto forti accusa difficoltà, segno che non riesce più.. a moltiplicare correttamente.

Nella forma più semplice di conversione si inviano i due segnali che devono essere moltiplicati direttamente sulla griglia di una valvola o sulla base di un transistor. Come avviene la conversione?

Se il dispositivo fosse "lineare" all'uscita si avrebbero solo le due frequenze e niente altro.

Detto $x(t)$ il segnale in ingresso e $y(t)$ il segnale in uscita si avrebbe $y(t) = a * x(t)$. E quindi con due frequenze all'ingresso: $y(t) = a * (F_1 + F_2) = a * F_1 + a * F_2$.

Se il dispositivo non è perfettamente lineare l'uscita, nel migliore dei casi, potrà essere approssimata con:

$$y(t) = a * x(t) + b * [x(t)]^2$$

Cosa comporta il termine al quadrato?

Se all'ingresso mandiamo il segnale F_1 all'uscita ci sarà anche $(F_1)^2$ cioè $F_1 * F_1$ e quindi la frequenza somma (frequenza doppia) e la frequenza differenza (zero, ovvero una componente continua).

Se inviamo due segnali $F_1 + F_2$ ci ritroveremo all'uscita

$$(F_1 + F_2)^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 + 2 * F_1 * F_2$$

(ricordando il quadrato di un binomio).

Ecco quindi che compare oltre ai quadrati, che danno una frequenza doppia, anche il prodotto che ci dà la somma e la differenza e quindi la conversione. Anche in questo caso c'è quindi un prodotto!

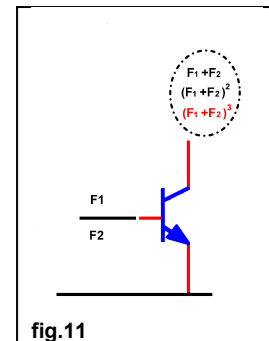


fig.11

Ma che succede se in ingresso compaiono altri due segnali forti di frequenza qualsiasi? Si moltiplicano pure loro, producendo frequenze somma e differenza indesiderate (ma queste generalmente non danno fastidio).

L'ipotesi di cui sopra era però ottimista. All'uscita oltre al quadrato ci sarà certamente anche un termine di terzo grado ed anche altri. Verranno fuori altri prodotti che ci daranno (i calcoli si

potrebbero pure fare, utilizzando il cubo di un binomio) le frequenze triple e le frequenze $2f_1-f_2$ e $2f_2-f_1$, frequenze ancora più indesiderate di quelle precedenti: i famigerati.. *prodotti di intermodulazione del terzo ordine*.

Nel mixer semplicissimo di cui sopra il problema è particolarmente evidente ma i *prodotti indesiderati* sono comunque presenti in ogni mixer (e in ogni amplificatore) naturalmente in quelli migliori con ampiezze minori.

La questione dovrebbe essere ulteriormente approfondita, ma ho voluto solo far vedere come sia fecondo il concetto di prodotto fra segnali.

Ripetiamo ancora una volta che in un mixer, se si riuscisse a realizzare una *perfetta* moltiplicazione, i prodotti indesiderati non ci sarebbero.

Qualcuno, tra i più giovani, a questo punto esclamerà: "perché non usiamo le capacità di calcolo di un computer per realizzare la moltiplicazione?" Ottima idea! I ricevitori del futuro certamente si realizzeranno così e si potranno ottenere prestazioni fantastiche. (Vedere l'articolo di G. Rosato *I Ricevitori Digitali* in Radiorivista 12/2003)

Noi però continueremo per un po' a usare i metodi tradizionali cercando le strategie migliori per realizzare i nostri obiettivi.

Per questo scopo segnalo un'ultima opportunità: potremmo usare per l'oscillatore locale un segnale ad onda quadra?

Siamo tentati di rispondere subito di no. Ci sono buoni motivi per ritenere che usciranno fuori tante cose indesiderate. Eppure vale la pena approfondire e.. meraviglia, verrà fuori che i risultati saranno superiori a quelli ottenibili con altri metodi.

Partendo da questa ultima osservazione sarebbe mia intenzione, se non sarò sommerso dalle proteste generali, dedicare un'altra pagina ad analizzare, mediante l'uso della matematica elementare, il funzionamento del mixer ad anello di diodi e quello con gli interruttori analogici che è stato efficacemente proposto da i7SWX Giancarlo Moda negli ultimi anni su Radiorivista.

Anche io ho realizzato il suo mixer in un RTX per i 40 metri utilizzandolo pure come modulatore bilanciato ed ottenendone grosse soddisfazioni. Voglio terminare sottolineando che il mio non vuol essere un discorso accademico ma un tentativo di unire insieme teoria e pratica dalla quale unione possono derivare per tutti progressi significativi.